



УДК 541.18. 532.517.4

## Теоретическая оценка устойчивости адсорбционного взаимодействия частиц твёрдой и газообразной дисперсных фаз в аппарате с механическим перемешиванием и аэрацией (обзор)

Ганин П.Г.

*Санкт-Петербургская государственная химико-фармацевтическая академия,  
Санкт-Петербург*

### Аннотация

Ряд технологических процессов происходит в системе жидкость - жидкость - твёрдая фаза - газ с механическим перемешиванием и аэрацией, например - рост микроорганизмов с использованием жидких гидрофобных соединений (субстратов). В таких системах возможна адсорбция частиц дисперсных фаз, образование сложных, в том числе «двойных частиц», и межфазных поверхностей типа газ - твёрдое тело, газ - жидкость, жидкость - твёрдое тело. Транспорт жидкой гидрофобной дисперсной фазы в твёрдую фазу (сорбент) в значительной степени происходит через межфазную поверхность этих фаз. Очевидно, что образование межфазных поверхностей газа с твёрдой и жидкой дисперсными фазами уменьшит площадь поверхности межфазного контакта твёрдой и жидкой дисперсных фаз, следовательно, и скорость переноса веществ между этими фазами. Предложена модель оценки устойчивости адсорбционного взаимодействия твёрдых сферических частиц и пузырьков газа в ядре турбулентного потока жидкости. Получено аналитическое выражение для оценки размера наибольших частиц дисперсных фаз, допускающих их устойчивое адсорбционное взаимодействие

### Введение

Ряд технологических процессов происходит в системах типа жидкость - жидкость - твёрдая фаза - газ с механическим перемешиванием. Пример такой системы - развитие микроорганизмов в водной среде на жидких гидрофобных соединениях (н-алканах нефти) в аппарате (ферментаторе) с интенсивным механическим перемешиванием и принудительной аэрацией. В таких системах возможна адсорбция частиц дисперсных фаз, образование сложных частиц (в том числе «двойных частиц») и межфазных поверхностей типа: газ - твёрдое тело, газ - жидкость, жидкость - твёрдое тело. Скоростью транспорта жидкой гидрофобной дисперсной фазы в твёрдую фазу (сорбент, клетки микроорганизмов) в значительной степени будет происходить через межфазную границу этих фаз [1]. Образование межфазных поверхностей газа с твёрдой и жидкой дисперсными фазами уменьшит площадь поверхности межфазного контакта твёрдой и жидкой дисперсных фаз, а следовательно, и скорость переноса веществ между этими фазами. Для оценки

влияния газообразной дисперсной фазы на скорость массопереноса вещества жидкой дисперсной фазы в твёрдую дисперсную фазу в первую очередь необходимо оценить устойчивость адсорбционного взаимодействия твёрдых сферических частиц и пузырьков газа в ядре турбулентного потока жидкости. Эта задача сводится к анализу устойчивости взаимодействия пары частиц - т.е. «двойных частиц» типа твёрдое тело - газ.

Отметим, что теоретическая оценка устойчивости адсорбционного взаимодействия твёрдой частицы и пузырька газа в ядре турбулентного потока жидкости схожа с оценкой устойчивости адсорбционного взаимодействия твёрдой сферической частицы и капли [1]. Основное отличие связано с тем, что пузырёк, в отличие от капли, испытывает силу инерции и силу гидростатического подъёма. Эти силы обусловлены существенным отличием плотности газа от плотности жидкости сплошной фазы, тогда как отличием плотностей жидкой и твёрдой дисперсных фаз можно пренебречь.

Настоящая теоретическая оценка представляется полезной не только для уточнения кинетики роста микроорганизмов при их развитии на жидких гидрофобных соединениях, но и для моделирования и интенсификации других процессов, протекающих в соответствии законом действующих поверхностей в системах типа жидкость - жидкость - твёрдая фаза - газ с механическим перемешиванием.

**Цель работы** - теоретическая оценка устойчивости адсорбционного взаимодействия частиц твёрдой и газообразной дисперсных фаз в ядре турбулентного потока жидкости в аппарате с интенсивным механическим перемешиванием и принудительной аэрацией.

## Теоретическая часть

**1. «Двойная частица» типа твёрдая сфера - пузырёк газа.** Рассмотрим систему жидкость - твёрдая фаза - газ с интенсивным механическим перемешиванием и принудительной аэрацией, в которой твёрдая дисперсная фаза представлена частицами сферической формы. Движение дисперсных частиц, обусловленное механическим перемешиванием (и всплыванием пузырьков), будет приводить к столкновениям частиц, а также их адсорбции. При адсорбции твёрдых частиц и пузырьков газа будут формироваться сложные частицы, в том числе «двойные частицы», в общем случае несимметричной формы. На рис. 1. приведена схема такой «двойной частицы», состоящей из твёрдой частицы диаметром  $C$  и пузырька газа диаметром  $D$  (изменённый диаметр - диаметр пузырька деформированного вследствие адсорбции на твёрдой поверхности).

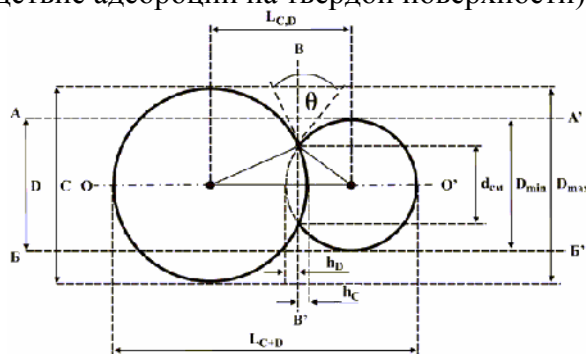


Рис. 1. Схема «двойной частицы» типа твёрдая сферическая частица -

пузырёк газа

$C$  - диаметр твёрдой сферы;  $D$  - изменённый диаметр пузырька газа;  $D_{\max}$  и  $D_{\min}$  - диаметры наибольшей и наименьшей из взаимодействующих частиц (диаметрами  $C$ ,  $D$ ), соответственно;  $d_{\text{см}}$  - диаметр окружности смачивания;  $\theta$  - угол смачивания;  $L_{C,D}$  - расстояние между центрами частиц;  $L_{C+D}$  - длина двойной частицы;  $h_C$  и  $h_D$  - высоты сегментов, отсекаемых плоскостью, проходящей через окружность смачивания от твёрдой сферы и пузырька газа, соответственно

**2. Диаметр наибольших пузырьков газа устойчивых в аппарате с механическим перемешиванием ( $d_{\text{кр}}$ )** оценивается на основе теории локальной однородной и изотропной турбулентности Колмогорова-Обухова [2, 3], а также теории дробления и устойчивости пузырьков газа в турбулентном потоке жидкости [4-6]. Оценка  $d_{\text{кр}}$  имеет вид

$$d_{\text{кр}} \approx 1,5(\sigma / \rho)^{0,6}(\rho / \rho_{\text{г}})^{0,2} \varepsilon_0^{-0,4}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  - диссипация энергии в аппарате в расчёте на единицу массы среды (Вт/кг);  $\sigma$  - поверхностное натяжение жидкости (Н/м);  $\rho$ ,  $\rho_{\text{г}}$  - плотность жидкости и газа (кг/м<sup>3</sup>), соответственно.

Помимо оценки (1), существуют и другие оценки  $d_{\text{кр}}$  (в том числе эмпирические), отражающие влияние вязкости сплошной (жидкость) и дисперсной (газ) фаз, а также объёмного содержания газообразной фазы [6]. Для настоящего исследования необходимо привести некоторые детали условия дробления пузырьков. Реализация дробления пузырьков предполагает выполнение двух необходимых условий: условия деформации (достаточного для деформации внешнего силового воздействия) и достаточной продолжительности такого силового воздействия.

**Условие деформации пузырька** предполагает превышение разности динамических напоров  $\Delta p_{\text{д}}$  (деформирующих каплю) над капиллярным давлением  $p_{\sigma}$  (препятствующего деформации) [4-6]

$$\Delta p_{\text{д}} > p_{\sigma}, \quad (2)$$

или

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_{\text{г}})^{-1/3} (\Delta v)^2 > 4\sigma / d, \quad (3)$$

где  $\Delta v$  - разность скоростей жидкости в окрестности пузырька;  $d$  - диаметр пузырька.

**Условие достаточной продолжительности деформации** (т.е. выполнения условия (3)) предполагает необходимость превышения продолжительности такого воздействия ( $\tau_{\text{д(г)}}$ ) над характерным временем деформации пузырька газа ( $\tau_{0(\text{г})}$ ) [5]

$$\tau_{\text{д(г)}} > \tau_{0(\text{г})}. \quad (4)$$

Очевидно, что условие (4) представляет собой, собственно, необходимое и достаточное условие дробления, поскольку оно в неявном виде предполагает выполнение условия деформации (3). Однако, характерное время деформации пузырька ( $\tau_{0(\text{г})}$ ) имеет оценку с точностью до порядка [5], что не позволяет построение условия дробления пузырька на основе условия (4) с необходимой точностью. Эту сложность удаётся «преодолеть» посредством следующих приближённых оценок. При выражении величины  $\Delta v$  через пульсационную скорость того же масштаба условие (3) примет вид

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_{\text{г}})^{-1/3} (v'_{\text{д}})^2 > 4\sigma / d, \quad (5)$$

где  $v'_{\text{д}}$  - пульсационная скорость (среднеквадратичное значение, усреднённое за бесконечно большой промежуток времени) масштаба  $\lambda = d$ .

Важно отметить, что принятие в расчёт в уравнении устойчивости (3) вместо  $\Delta v$  величины  $v'_{\text{д}}$  (5) предполагает, что время, в течение которого мгновенная

величина пульсационной скорости  $v'_d(t)$  превышает собственно пульсационную скорость  $v'_d$  обеспечивает выполнение условия (4), т. е. - достаточную продолжительность деформации пузырька для реализации акта дробления.

**Условие устойчивости по отношению к дроблению**, в соответствии с (5), будет иметь вид

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_r)^{-1/3}(v'_d)^2 \leq 4\sigma / d. \quad (6)$$

**Диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости ( $d_{кр}$ )** оценивается на основе уравнения, вытекающего из условия устойчивости (6), при условии достижения пульсационной скорости максимальной величины  $v'_{\lambda}=v'_{(max)\lambda}$ . Соответствующие подстановки  $v'=v'_{(max)\lambda}$  и  $\lambda=d=d_{кр}$  в уравнение (6), дадут

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_r)^{-1/3}(v'_{(max)d_{кр}})^2 = 4\sigma / d_{кр}, \quad (7)$$

где  $v'_{(max)d_{кр}}$  - максимальная величина пульсационной скорости масштаба  $\lambda=d_{кр}$ .

Поскольку амплитуда пульсационной скорости является случайной величиной, в первом приближении распределённой по нормальному закону [7], для максимального значения в таком случае принимается оценка [6-9]

$$v'_{(max)\lambda} \approx 3v'_{\lambda}. \quad (8)$$

С учётом (8), уравнение (7) приобретает вид

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_r)^{-1/3}9(v'_{d_{кр}})^2 \approx 4\sigma / d_{кр}. \quad (9)$$

В соответствии с «законом двух третей» Колмогорова-Обухова [2, 3], для масштабов движения  $\lambda$ , удовлетворяющих условию  $L>\lambda>\lambda_0$  (где  $L$  - диаметр аппарата,  $\lambda_0$  - внутренний масштаб турбулентности), пульсационная скорость жидкости масштаба  $\lambda$  оценивается зависимостью

$$(v'_{\lambda})^2 \approx (\varepsilon_0^L \lambda)^{2/3}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_0^L$  - локальное значение диссипация энергии в расчёте на единицу массы среды.

Уравнение (9), с учётом (10), приобретает вид

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_r)^{-1/3}9(\varepsilon_0^L d_{кр})^{2/3} \approx 4\sigma / d_{кр}. \quad (11)$$

Уравнение (11) позволяет оценить диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости, где соблюдаются условия локальной однородной и изотропной турбулентности. Эти условия, выполняются в гипотетических (идеальных) системах, а также, с известным приближением, в зонах реального аппарата с механическим перемешиванием среды.

**Диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в реальном аппарате с перемешиванием**

В реальных аппаратах с механическим перемешиванием распределение диссипации энергии является неоднородным. Наибольшая локальная величина диссипация энергии ( $\varepsilon_0^{L(max)}$ ) достигается в зоне мешалки:  $\varepsilon_0^{L(max)}=\varepsilon_0^{ZM}$ . По оценкам  $\varepsilon_0^{ZM}$  в 50÷100 раз превосходит среднее по аппарату значение диссипация энергии ( $\varepsilon_0$ ) [10], в расчётах используется среднее значение [6]

$$\varepsilon_0^{L(max)} = \varepsilon_0^{ZM} \approx 75\varepsilon_0. \quad (12)$$

Подстановка (12) в уравнение (11), даст

$$(1/2)\rho(\rho / \rho_r)^{-1/3}9(75\varepsilon_0 d_{кр})^{2/3} \approx 4\sigma / d_{кр}, \quad (13)$$

откуда следует уравнение (1).

Экспериментально установленный размер пузырьков газа вблизи лопастей мешалки, (эмпирические зависимости) удовлетворительно согласуется с расчётными величинами [6], что позволит в нашем последующем моделировании использовать приведённые выше теоретические оценки.

**Диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в основной зоне**

**аппарата ( $d_{кр.ZF}$ ).** В первом приближении в объёме аппарата выделяют две зоны, в пределах которых соблюдаются условия однородной и изотропной турбулентности - зону мешалки и основную зону аппарата (обозначим индексами “ZM” и “ZF”, соответственно). Можно показать [11], что диссипация энергии в основной зоне аппарата ( $\varepsilon_0^{ZF}$ ) стандартного конструктивного типа с турбинной мешалкой, с учётом (12), составит

$$\varepsilon_0^{ZF} \approx 0,25\varepsilon_0. \quad (14)$$

Из (11), полагая  $\varepsilon_0^L = \varepsilon_0^{ZF}$  и с учётом (14), получим оценку «локальной» ( $d_{кр.L}$ ) величины  $d_{кр.}$  для основной зоны аппарата

$$d_{кр.ZF} \approx 1,5(1/9)^{0,6}(\sigma / \rho)^{0,6}(\rho / \rho_T)^{0,2}(0,25\varepsilon_0)^{-0,4}. \quad (15)$$

**Адекватность величин  $d_{кр}$  и  $d_{кр.ZM}$ .** Поскольку при оценке диаметра наибольших пузырьков газа, устойчивых в аппарате ( $d_{кр}$ ), используется наибольшая локальная величина диссипации в аппарате, которая достигается в зоне мешалки ( $\varepsilon_0^{L(max)} = \varepsilon_0^{ZM}$ ), то величина  $d_{кр}$  адекватна диаметру наибольших пузырьков газа, устойчивых в зоне мешалки  $d_{кр.ZM}$  («локальная» величина  $d_{кр}$  для зоны мешалки)

$$d_{кр} \equiv d_{кр.ZM}. \quad (16)$$

На рис. 2. для наглядности приведены расчётные, по уравнениям (1) и (15), зависимости диаметра наибольших пузырьков газа, устойчивых в аппарате ( $d_{кр}$ ) (соответствует  $d_{кр.ZM}$ ) и в основной зоне аппарата ( $d_{кр.ZF}$ ) от средней по аппарату величины диссипации энергии в расчёте на единицу массы жидкости ( $\varepsilon_0$ ). Расчёт проведён для аппарата стандартного конструктивного типа с турбинной мешалкой и разделительными перегородками (вода - воздух;  $t=30^{\circ}\text{C}$ ;  $\rho_{\text{вода}} \approx 10^3$ ,  $\rho_{\text{воздух}} \approx 1,2$ , кг/м<sup>3</sup>;  $\sigma \approx 72,75 \cdot 10^{-3}$ , Н/м).

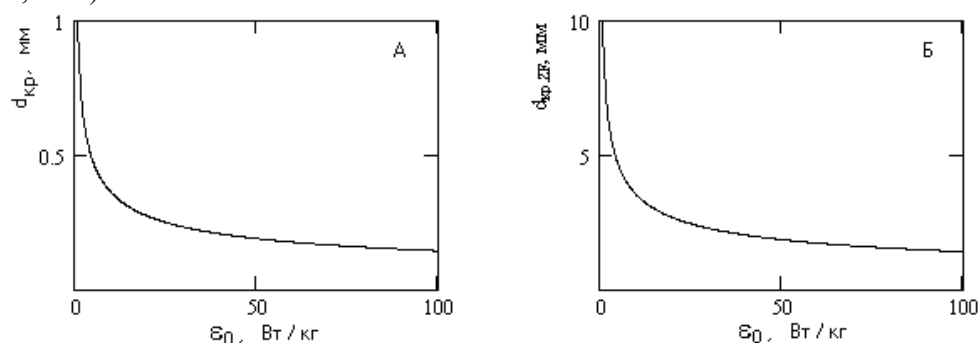


Рис. 2. Расчётная зависимость диаметра наибольших пузырьков газа устойчивых (А) в аппарате ( $d_{кр}$ , мм) и (Б) в основной зоне аппарата ( $d_{кр.ZF}$ , мм) от средней величины диссипации энергии в аппарате в расчёте на единицу массы среды ( $\varepsilon_0$ , Вт/кг). Система вода – воздух,  $t=30^{\circ}\text{C}$

**Внутренний масштаб турбулентности ( $\lambda_0$ ).** Оценим  $\lambda_0$  для определения границ применимости расчёта пульсационной скорости по уравнению (10). Величина  $\lambda_0$  оценивается зависимостью [5]

$$\lambda_0 \approx (v^3 \rho / \varepsilon)^{1/4} = (\eta^3 / \rho^3 \varepsilon_0^L)^{1/4}$$

где  $v$  - кинетическая вязкость жидкости ( $v = \eta / \rho$ );  $\eta$  - вязкость жидкости.

На рис. 3 приведена зависимость  $\lambda_0$  от локальной величины диссипации энергии ( $\varepsilon_0^L$ ), а так же зависимость величины  $\lambda_0$  в зоне мешалки и в основной зоне аппарата от средней величины диссипации энергии в аппарате ( $\varepsilon_0$ ). Рассчитано с учётом (12, 14);  $t=30^{\circ}\text{C}$ ;  $\eta_{\text{вода}} \approx 1$ , мПа·с;  $\rho_{\text{вода}} \approx 10^3$ , кг/м<sup>3</sup>.

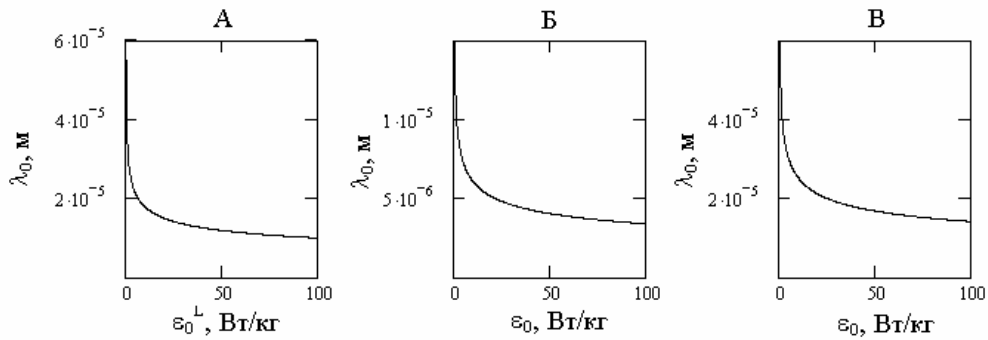


Рис. 3. Зависимость внутреннего масштаба турбулентности ( $\lambda_0$ ) от диссипации энергии ( $\varepsilon_0$ ). (Вода,  $t=30^\circ\text{C}$ )

А) Зависимость  $\lambda_0$  от локальной величины диссипации энергии ( $\varepsilon_0^L$ );  
 Зависимость  $\lambda_0$  от средней по аппарату величины диссипации энергии ( $\varepsilon_0$ ): (Б) В зоне мешалки; (Б) В основной зоне аппарата

**3. Условие устойчивости «двойной частицы» типа газ - твёрдое тело** (по отношению к деформации) можно представить, как необходимость превышения силы прилипания пузырька газа к твёрдой частице над суммой сил, действующих на «двойную частицу» и способствующих её деформации. Нас будет интересовать частный случай, когда плотность твёрдой частицы ( $\rho_T$ ) несущественно отличается от плотности сплошной жидкой фазы ( $\rho$ ):  $\rho_T \approx \rho$ . В векторном виде условие устойчивости «двойной частицы» можно представить

$$\mathbf{F}_{\text{пр}} \geq \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_{\sigma,p} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_B, \quad (17)$$

откуда получим удобную для дальнейшего анализа форму

$$\mathbf{F}_D \leq \mathbf{F}_{\text{пр}} - [\mathbf{F}_{\sigma,p} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_B], \quad (18)$$

где  $\mathbf{F}_D$  - вектор силы, обусловленной разницей динамических напоров сплошной фазы и приложенной к противоположным концам взаимодействующих частиц;  $\mathbf{F}_{\text{пр}}$  - вектор силы прилипания пузырька газа к твёрдой поверхности;  $\mathbf{F}_{\sigma,p}$  - вектор силы, обусловленной капиллярным давлением в газовом пузырьке;  $\mathbf{F}_a$  - вектор силы инерции;  $\mathbf{F}_B$  - вектор выталкивающей силы.

**3.1. Сила, обусловленная разницей динамических напоров жидкости ( $\mathbf{F}_D$ )** вблизи «двойной частицы» и направленная вдоль оси проходящей через центры взаимодействующих частиц  $O-O'$  (рис. 1), будет «растягивать» «двойную частицу». Величина этой силы будет обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, разностью динамических напоров на противоположных сторонах (вдоль оси  $O-O'$ ) «двойной частицы»  $\Delta p_d$ , т. е. - величиной  $\Delta p_d$  масштаба  $\lambda = L_{C+D}$  (длина «двойной частицы»). Очевидно, что действие  $\Delta p_d$  масштаба каждой из взаимодействующих частиц ( $\lambda=C$  или  $\lambda=D$ ) может привести только к деформации индивидуальных частиц и не создаст «растяжения» (деформации) «двойной частицы» и последующего её дробления. Во-вторых, площадью сечения наименьшей из взаимодействующих частиц (если угол смачивания  $\theta < \pi/2$ ). Очевидно, что действие  $\Delta p_d$  вне «габаритов» меньшей из частиц - т. е. вне мысленного цилиндра диаметром равного диаметру наименьшей из частиц (сечение цилиндра обозначено прерывистыми линиями А-А', В-В') не создаст напряжения между частицами. Для силы  $\mathbf{F}_D$  можно принять оценку

$$\mathbf{F}_D \approx \Delta p_d S_{\text{min}}, \quad (19)$$

где  $\Delta p_d$  - вектор разности динамических напоров на противоположных сторонах

«двойной частицы»;  $S_{\min}$  - площадь сечения наименьшей из взаимодействующих частиц (диаметрами  $C$  и  $D$ ).

Для количественной оценки  $\Delta r_d$  необходимо сопоставить размер пузырька газа ( $D$ ) с толщиной пограничного слоя  $\delta_0$  вблизи поверхности твёрдой частицы.

**Толщина пограничного слоя жидкости  $\delta_0$**  вблизи твёрдой поверхности (частицы) оценивается зависимостью  $\delta_0 \sim (\nu \lambda / U_0)^{1/2}$ , характерная скорость обтекания  $U_0$  имеет порядок величины пульсационной скорости масштаба частицы  $U_0 \approx \nu' \lambda \approx (\varepsilon_0 \lambda)^{1/3}$ , где  $\nu$  - кинетическая вязкость жидкости (сплошной фазы);  $\lambda$  - размер частицы;  $\varepsilon_0$  - диссипация энергии в расчёте на единицу массы среды [5]. Полагая  $\lambda = C$ , получим оценку:  $\delta_0 \sim (\nu C^{2/3} / \varepsilon_0^{1/3})^{1/2} = (\nu^3 C^2 / \varepsilon_0)^{1/6}$ , где  $C$  - диаметр твёрдой частицы. В толще пограничного слоя, по мере приближения к твёрдой поверхности, турбулентные пульсации убывают.

На рис. 4 приведена зависимость  $\delta_0$  вблизи поверхности твёрдых частиц сферической формы диаметром 5 мкм (рис. А, В) и 0,2 мкм (рис. Б, Г) при их нахождении в зоне мешалки (рис. А, Б) и в основной зоне аппарата (рис. В, Г) от средней по аппарату величины диссипации энергии ( $\varepsilon_0$ ). Рассчитано с учётом (12, 14);  $t=30^\circ\text{C}$ ;  $\eta_{\text{вода}} \approx 1$ , мПа·с;  $\rho_{\text{вода}} \approx 10^3$ , кг/м<sup>3</sup>.

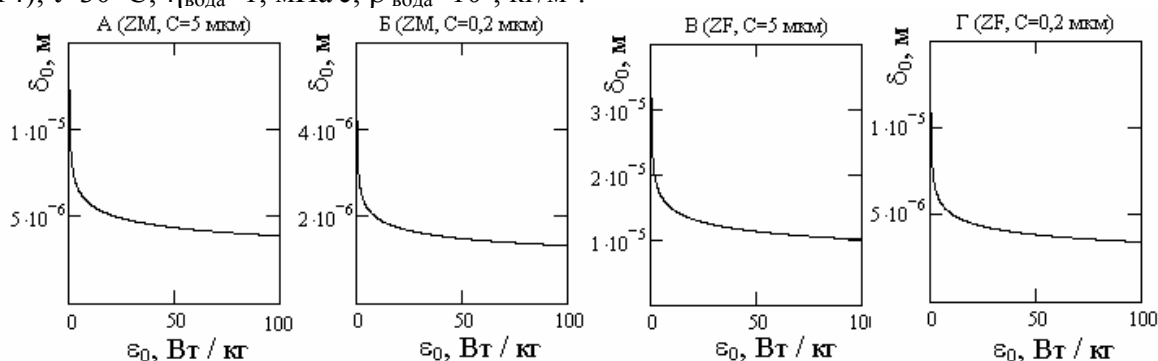


Рис. 4. Зависимость толщины пограничного слоя жидкости ( $\delta_0$ ) вблизи поверхности твёрдых частиц (диаметром  $C$ ) от средней по аппарату величины диссипации энергии ( $\varepsilon_0$ ). (Вода,  $t=30^\circ\text{C}$ )

А) Зона мешалки, диаметр частиц  $C=5$  мкм; Б) Зона мешалки, диаметр частиц  $C=0,2$  мкм; В) Основная зона аппарата, диаметр частиц  $C=5$  мкм; Г) Основная зона аппарата, диаметр частиц  $C=0,2$  мкм

**Случай  $D < \delta_0$ .** Пузырёк газа, по существу, находится не в ядре турбулентного потока жидкости, а в толще пограничного слоя жидкости вблизи твёрдой (поверхности) частицы. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

**Случай  $D > \delta_0$ .** В этом случае разность динамических напоров жидкости ( $\Delta r_d$ ) вблизи противоположных сторон «двойной частицы» (вдоль оси  $O-O'$ ), можно представить [5, 6], как

$$\Delta r_d = (1/2)\rho(\nu' \lambda)^2, \quad (20)$$

где  $\rho$  - плотность сплошной фазы;  $\nu' \lambda$  - пульсационная скорость жидкости масштаба  $\lambda$ ;  $\lambda = L_{C+D}$  - длина «двойной частицы».

Уравнение (19) с учётом (20) примет вид

$$F_d \approx (1/2)\rho(\nu' \lambda)^2 S_{\min}. \quad (21)$$

Выражая площадь сечения наименьшей из взаимодействующих частиц (диаметрами  $C$  и  $D$ ) через её диаметр ( $D_{\min}$ ):  $S_{\min} = 2^{-1} \pi D_{\min}^2$ , из (21) будем иметь

$$F_d \approx 2^{-3} \pi \rho (\nu' \lambda)^2 D_{\min}^2, \quad (22)$$

откуда можно получить оценку максимальной величины  $F_d$

$$F_{D(\max)} \approx 2^{-3} \pi \rho (v'_{(\max)\lambda})^2 D_{\min}^2, \quad (23)$$

где  $v'_{(\max)\lambda}$  - максимальная величина пульсационной скорости масштаба  $\lambda=L_{C+D}$ .

С учётом (8), из (23) получим

$$F_{D(\max)} \approx 9(2)^{-3} \pi \rho (v'_{\lambda})^2 D_{\min}^2. \quad (24)$$

Если длина «двойной частицы» ( $L_{C+D}$ ) удовлетворяет условию  $L_{C+D} > \lambda_0$ , то пульсационная скорость жидкости масштаба  $\lambda=L_{C+D}$  оценивается зависимостью (10), и уравнение (24), примет вид

$$F_D \approx 2^{-3} \pi \rho (\varepsilon_0^L L_{C+D})^{2/3} D_{\min}^2. \quad (25)$$

Можно показать, что длина «двойной частицы» ( $L_{C+D}$ ) составит

$$L_{C+D} = (1/2)[(C + D) + (C^2 + D^2 + 2CD\cos\theta)^{1/2}]. \quad (26)$$

Уравнение (25) и (24), с учётом (10), примут, соответственно, удобный для последующего анализа вид

$$F_D \approx (2)^{-11/3} \pi \rho (\varepsilon_0^L)^{2/3} [2L_{C+D}]^{2/3} D_{\min}^2, \quad (27)$$

$$F_{D(\max)} \approx 9(2)^{-11/3} \pi \rho (\varepsilon_0^L)^{2/3} [2L_{C+D}]^{2/3} D_{\min}^2. \quad (28)$$

Для интересующего нас размера дисперсных частиц: диаметр твёрдых частиц  $C > 0,2$  мкм (клетки дрожжей  $C \approx 2 \div 8$  мкм, бактерий -  $C \approx 0,2 \div 0,5$  мкм), средний диаметр пузырьков газа (при интенсивном механическом перемешивании среды) порядка  $D \approx 1 \div 3$  мм [6], а величина  $d_{кр}$  не менее 0,2 мм (рис. 2), очевидно, что длина «двойной частицы» превышает внутренний масштаб турбулентности (рис. 3)  $L_{C+D} \approx C+D > \lambda_0$ , а диаметр пузырьков газа превосходит толщину пограничного слоя жидкости вблизи твёрдой частицы (рис. 4)  $D > \delta_0$ . Эти обстоятельства обеспечивают применимость уравнений (10) и (20) для оценки пульсационной скорости ( $v'_{\lambda}$ ) и разности динамических напоров ( $\Delta p_d$ ) масштаба  $\lambda=L_{C+D}$ .

**3.2. Сила прилипания пузырька к твёрдой поверхности ( $F_{пр}$ )** в статических условиях может быть представлена в виде [12]

$$F_{пр} \approx L_{см} \sigma \sin\theta = \pi d_{см} \sigma \sin\theta, \quad (29)$$

где  $L_{см}$  - периметр смачивания;  $\sigma$  - поверхностное натяжение жидкости;  $d_{см}$  - диаметр окружности смачивания;  $\theta$  - угол смачивания.

Можно показать, что диаметр окружности смачивания, составит

$$d_{см} = CD \sin\theta / 2L_{C,D}, \quad (30)$$

$$L_{C,D} = (1/2)(C^2 + D^2 + 2CD\cos\theta)^{1/2}. \quad (31)$$

где  $L_{C,D}$  - расстояние между центрами частиц.

Уравнение (29), с учётом (30), примет вид

$$F_{пр} \approx \pi \sigma CD (\sin\theta)^2 / 2L_{C,D}, \quad (32)$$

**3.3. Сила отталкивания, обусловленная капиллярным давлением в пузырьке газа ( $F_{\sigma,p}$ )** в плоскости, проходящей через периметр контакта (нормальная составляющая силы), создаст напряжение

$$F_{\sigma,p} = S_{1-2} P_{\sigma} = (1/4) \pi d_{см}^2 [CD \sin\theta / 2L_{C,D}]^2 (4\sigma / D)$$

откуда, с учётом (30), после элементарных преобразований получим

$$F_{\sigma,p} = \pi \sigma C^2 D (\sin\theta)^2 / (2L_{C,D})^2, \quad (33)$$

где  $S_{1-2} = (1/4) \pi d_{см}^2$  - площадь сечения «двойной частицы» по окружности смачивания;  $P_{\sigma} = 2\sigma/R$  - капиллярное давление жидкости в капле (уравнение Лапласа-Юнга);  $R = (1/2)D$  - радиус капли (в общем случае - радиус кривизны поверхности раздела фаз).

**3.4. Сила гидростатическая подъёма ( $F_B$ )** (выталкивающая сила, сила Архимеда), действующая на пузырёк газа, будет направлена вертикально вверх, вектор силы составит

$$F_B = -V_r (\rho - \rho_r) \mathbf{g}, \quad (34)$$



где  $V_{\Gamma}$  – объём газового пузырька;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\rho_{\Gamma}$  – плотность газа;  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения силы тяжести.

Очевидно, что объём газового пузырька, деформированного в результате адсорбции на твёрдой частице  $V_{\Gamma}$ , будет равен объёму исходного недеформированного пузырька ( $V_{\Gamma(0)}$ )

$$V_{\Gamma} = V_{\Gamma(0)} = (1/6)\pi D_0^3 \quad (35)$$

и, если угол смачивания ( $\theta$ ) не слишком велик, то диаметр пузырька газа не слишком изменится при деформации (адсорбции), тогда можно приближённо принять

$$D_0 \approx D, \quad (36)$$

где  $D_0$  – диаметр исходного недеформированного пузырька.

С учётом (36), из (35) получим

$$V_{\Gamma} \approx (1/6)\pi D^3. \quad (37)$$

Уравнение (34), с учётом (37), примет приближённый вид

$$\mathbf{F}_B \approx - (1/6)\pi D^3 (\rho - \rho_{\Gamma}) \mathbf{g}, \quad (38)$$

поскольку плотность газа существенно меньше плотности жидкости ( $\rho \gg \rho_{\Gamma}$ ), из (38), можно принять

$$\mathbf{F}_B \approx - (1/6)\pi D^3 \rho \mathbf{g}, \quad (39)$$

**3.5. Сила инерции ( $\mathbf{F}_a$ )** приведёт к «растяжению» «двойных частиц» вдоль оси О-О' (рис. 1). Она возникнет в турбулентном потоке жидкости ввиду различия плотностей сплошной (жидкость) и дисперсной (газ) фаз. Сила инерции и её максимальная величина, соответственно, составят

$$\mathbf{F}_a = (\rho - \rho_{\Gamma}) V_{\Gamma} \boldsymbol{\omega}_{\lambda} = (1/6)\pi D_0^3 (\rho - \rho_{\Gamma}) \boldsymbol{\omega}_{\lambda}, \quad (40)$$

$$\mathbf{F}_a^{\max} = (\rho - \rho_{\Gamma}) V_{\Gamma} \boldsymbol{\omega}_{\lambda}^{\max} = (1/6)\pi D_0^3 (\rho - \rho_{\Gamma}) \boldsymbol{\omega}_{\lambda(a)}^{\max}, \quad (41)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{\lambda}$  и  $\boldsymbol{\omega}_{\lambda}^{\max}$  – вектор ускорения турбулентных пульсаций масштаба  $\lambda_a$  и его максимальная величина, соответственно;  $\lambda_a$  – расстояние между центрами инерции твёрдой частицы и пузырька газа.

Сделаем три приближения. Для не слишком больших углов смачивания ( $\theta$ ) можно принять: во-первых, что диаметр пузырьков при деформации изменяется незначительно  $D \approx D_0$  (36), во-вторых, расстояние между центрами инерции адсорбированных частиц будет приближённо соответствовать расстоянию между геометрическими центрами взаимодействующих частиц, составит:  $\lambda_a \approx L_{C,D}$  (рис. 1). В-третьих, поскольку плотность газа пренебрежимо мала по сравнению с плотностью жидкости сплошной фазы ( $\rho \gg \rho_{\Gamma}$ ), можно принять  $\rho - \rho_{\Gamma} \approx \rho$ . Тогда из (40, 41), соответственно, получим оценки

$$\mathbf{F}_a \approx (1/6)\pi D^3 \rho \boldsymbol{\omega}_{\lambda}, \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_a^{\max} \approx (1/6)\pi D^3 \rho \boldsymbol{\omega}_{\lambda}^{\max}, \quad (43)$$

где  $\lambda \approx L_{C,D}$ , задано уравнением (31).

**Ускорение турбулентных пульсаций ( $\boldsymbol{\omega}_{\lambda}$ )** оценивается следующим образом [5]. Характерный период  $T_{\lambda}$  и скорость  $v_{\lambda}$  турбулентных пульсаций масштаба  $\lambda$  можно представить в виде

$$T_{\lambda} = (\lambda^2 \rho / \varepsilon) = (\lambda^2 / \varepsilon_0) \sim \lambda / v_{\lambda}, \quad (44)$$

$$v_{\lambda} = d\lambda / dT_{\lambda} \sim \lambda / T_{\lambda}, \quad (45)$$

откуда получают оценку  $\boldsymbol{\omega}_{\lambda}$  по порядку величины [5], которую применительно к локальной зоне аппарата, запишем, соответственно, в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{\lambda} = dv_{\lambda} / dT_{\lambda} \sim v_{\lambda} / T_{\lambda} \sim \lambda / T_{\lambda}^2 \sim (\varepsilon^L / \rho)^{2/3} (1 / \lambda^{1/3}) \sim (\varepsilon_0^L)^{2/3} (1 / \lambda^{1/3}), \quad (46)$$

или

$$\boldsymbol{\omega}_{\lambda} \sim \lambda / T_{\lambda}^2 = \lambda / (\lambda / v_{\lambda})^2 = v_{\lambda}^2 \lambda^{-1}. \quad (47)$$

Принимая во внимание, что ускорение турбулентных пульсаций ( $\boldsymbol{\omega}_{\lambda}$ )

оценивается по порядку величин (46, 47) [5], эти оценки, соответственно, можно представить (введя коэффициент  $k_a$ ) в виде

$$\omega_\lambda \approx k_a(\varepsilon_0^L)^{2/3}(1/\lambda^{1/3}), \quad (48)$$

$$\omega_\lambda \approx k_a v_\lambda^2(1/\lambda), \quad (49)$$

где  $\lambda \approx L_{C,D}$ , задано уравнением (31);

$$k_a = 0,33 \div 3,3. \quad (50)$$

**Максимальная величина ускорения турбулентных пульсаций ( $\omega_\lambda^{\max}$ ).** Очевидно, что оценку  $\omega_\lambda^{\max}$  можно получить, приняв в расчёт максимальную величину пульсационной скорости того же масштаба ( $\lambda$ ), с учётом (8) из оценок (46, 47), соответственно, получим

$$\omega_\lambda^{\max} \sim 9(\varepsilon/\rho)^{2/3}(1/\lambda^{1/3}) = 9(\varepsilon_0^L)^{2/3}(1/\lambda^{1/3}), \quad (51)$$

$$\omega_\lambda^{\max} \sim (v_\lambda^2/\lambda)^{\max} \sim (v_\lambda^{\max})^2/\lambda = 9v_\lambda^2(1/\lambda), \quad (52)$$

или с учётом (48-50), соответственно, получим

$$\omega_\lambda^{\max} \approx 9k_a(\varepsilon_0^L)^{2/3}(1/\lambda^{1/3}), \quad (53)$$

$$\omega_\lambda^{\max} \approx 9k_a v_\lambda^2(1/\lambda), \quad (54)$$

где  $\lambda \approx L_{C,D}$ , задано уравнением (31);  $k_a$  задано уравнением (50).

**Сила инерции ( $F_a$ ),** заданная оценкой (42), полагая  $\lambda \approx L_{C,D}$  и с учётом (48, 49), соответственно, примет вид

$$F_a \sim (1/6)\pi D^3(\rho - \rho_r)(v_\lambda)^2 L_{C,D}^{-1}, \quad (55)$$

$$F_a \sim (1/6)\pi D^3(\rho - \rho_r)(\varepsilon_0^L)^{2/3} L_{C,D}^{-1/3}, \quad (56)$$

откуда с учётом (50-52), соответственно, примет вид приближённых равенств

$$F_a \approx (1/6)k_a \pi D^3(\rho - \rho_r)(v_\lambda)^2 L_{C,D}^{-1}, \quad (57)$$

$$F_a \approx (1/6)k_a \pi D^3(\rho - \rho_r)(\varepsilon_0^L)^{2/3} L_{C,D}^{-1/3}, \quad (58)$$

где  $\lambda \approx L_{C,D}$  задано уравнением (31);  $k_a$  задано уравнением (50).

**Максимальная величина силы инерции ( $F_a^{\max}$ ),** заданная оценкой (41), с учётом (51, 52), соответственно, примет вид

$$F_a^{\max} \sim (1/6)9\pi(\rho - \rho_r) D^3(v_\lambda^2/L_{C,D}), \quad (59)$$

$$F_a^{\max} \sim (1/6)9\pi(\rho - \rho_r) D^3(\varepsilon_0^L)^{2/3} L_{C,D}^{-1/3}, \quad (60)$$

откуда, с учётом (48-50), соответственно, примет вид приближённых равенств

$$F_a^{\max} \approx (1/6)9k_a \pi(\rho - \rho_r) D^3(v_\lambda^2/L_{C,D}), \quad (61)$$

$$F_a^{\max} \approx (1/6)9k_a \pi(\rho - \rho_r) D^3(\varepsilon_0^L)^{2/3} L_{C,D}^{-1/3}, \quad (62)$$

где  $\lambda \approx L_{C,D}$  задано уравнением (31);  $k_a$  задано уравнением (50).

На основании допустимых границ вариации коэффициента  $k_a$  (50) (отражает точность оценки ускорения турбулентных пульсаций в пределах порядка), приведём предельные и среднее его значения

$$k_{a(\min)} = 0,33 \text{ (а)}; \quad k_{a(\text{cp})} = 1 \text{ (б)}; \quad k_{a(\max)} = 3,3 \text{ (в)}. \quad (63)$$

**3.6. Условие устойчивости по отношению к деформации в развёрнутом виде.** Очевидно, что вектора всех сил, входящие в уравнение устойчивости (18), за исключением вектора выталкивающей силы ( $F_B$ ) направлены вдоль оси проходящей через центры взаимодействующих частиц - О-О'. Вектор выталкивающей силы ( $F_B$ ) направлен вертикально вверх, а результирующая сила всех остальных сил (векторная сумма)  $F_{\text{рез}} = F_{\text{пр}} - (F_D + F_{\sigma,p} + F_a)$  имеет произвольное, случайное направление. Это обстоятельство предполагает решение уравнения устойчивости в векторном виде, что затруднительно. Однако можно ожидать, что при достаточно интенсивном перемешивании выталкивающей силой  $F_B$  можно пренебречь по сравнению с силой инерции  $F_a$ . Такая оценка сводится к сопоставлению величин ускорения турбулентных пульсаций ( $\omega_\lambda$ ) и ускорения силы тяжести ( $g$ ). Очевидно, что выталкивающей силой можно пренебречь при выполнении условия, которое с

учётom (46), будет иметь вид

$$\omega_{\lambda} = (\varepsilon_0)^{2/3} (1/\lambda^{1/3}) \gg g, \quad (64)$$

где  $\lambda = L_{C,D}$ , задано уравнением (26).

На рис. 5 приведена расчётная зависимость ускорения турбулентных пульсаций ( $\omega_{\lambda}$ ) масштаба «двойной частицы»  $\lambda \approx L_{C,D}$  от средней величины диссипации энергии в аппарате ( $\varepsilon_0$ ). «Двойная частица» образована пузырьком газа диаметром  $D=1$  мм и твёрдой частицей диаметром  $C=5$  мкм, угол смачивания  $\theta=50$  град. Расчёт проведён по зависимостям (46, 51) и (31) для основной зоны аппарата, где  $\varepsilon_0^{ZF}=0,25\varepsilon_0$ , (14). В аппаратах с механическим перемешиванием  $\varepsilon_0$  устанавливают от 1 до 100 Вт/кг, при культивировании микроорганизмов с использованием жидких гидрофобных соединений - от 10 до 50 Вт/кг [13]. Для наглядности на рис. 3 приведено ускорение силы тяжести ( $g$ ).

Средний диаметр пузырьков газа в аппарате с интенсивным перемешиванием составляет  $D=1\div 3$  мм [6]. В этой связи в приведённой расчётной зависимости  $\omega_{\lambda}$  от  $\varepsilon_0$  (рис. 5) принят в расчёт диаметр  $D=1$  мм. Однако диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости, зависит от локальной величины диссипации энергии в зонах аппарата. На рис. 2 приведены расчётные по уравнениям (1, 15) зависимости диаметров наибольших пузырьков газа устойчивых в аппарате ( $d_{кр}=d_{кр,ZM}$ ) и в основной зоне аппарата ( $d_{кр,ZF}$ ) от величины  $\varepsilon_0$ . В этой связи представляется целесообразным оценить силу инерции, испытываемую пузырьком газа, составляющего «двойную частицу», размер которого соответствует наибольшему пузырьку газа, устойчивому в зонах аппарата.

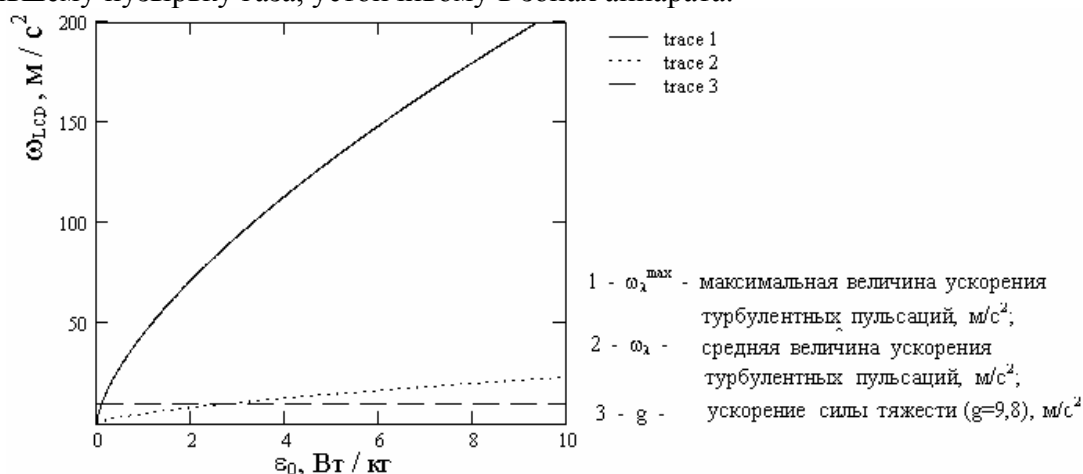


Рис. 5. Расчётная зависимость средней ( $\omega_{\lambda,ZF}$ ) и максимальной ( $\omega_{\lambda}^{\max,ZF}$ ) величин ускорения турбулентных пульсаций масштаба  $\lambda \approx L_{C,D}$  в основной зоне аппарата от средней величины диссипации энергии в аппарате в расчёте на единицу массы среды ( $\varepsilon_0$ ). Рассчитано для  $D=1$  мм,  $C=5$  мкм,  $\theta=50$  град

На рис. 6 приведена расчётная зависимость отношения максимальной и средней величины ускорения турбулентных пульсаций масштаба  $\lambda \approx L_{C,D}$  к ускорению силы тяжести ( $\omega_{\lambda}^{\max}/g$  и  $\omega_{\lambda}/g$ , соответственно) от средней величины диссипации энергии в аппарате  $\varepsilon_0$ . Расчёт проведён для зоны мешалки (рис. 6. А, Б) и основной зоны аппарата (рис. 6 В, Г), «двойной частицы», образованной твёрдой частицей диаметром  $C=5$  мкм и наибольшим пузырьком газа, устойчивым в зоне мешалки ( $D=d_{кр,ZM}=d_{кр}$ ) и в основной зоне аппарата ( $D=d_{кр,ZF}$ ) при угле смачивания  $\theta=50$  град. На каждом рисунке приведены зависимости, рассчитанные для различных значений коэффициента (65):  $k_a=0,33$ ,  $k_a=1$ ,  $k_a=3,3$ .

Как следует из представленных расчётных данных (рис. 5-6), при  $\varepsilon_0 > 1 \div 5$  Вт/кг выталкивающей силой вполне можно пренебречь по сравнению с силой инерции. Тогда, уравнение устойчивости (18) примет упрощённый вид, который, как очевидно, можно представить в скалярной форме

$$F_D \leq F_{пр} - (F_{\sigma,p} + F_a), \quad (65)$$

откуда, после соответствующих подстановок (22, 32, 33, 57) и элементарных преобразований, получим

$$2^{-3} \rho (v'_{\lambda 1})^2 D_{\min}^2 \leq [\sigma C D (\sin \theta)^2 / 2 L_{C,D}] [1 - C / 2 L_{C,D}] - (1/6) D^3 (\rho - \rho_r) (v'_{\lambda 2})^2 / L_{C,D}, \quad (66)$$

где  $\lambda_1 = L_{C+D}$  и  $\lambda_2 = L_{C,D}$  заданы уравнениями (26, 31); можно показать, что  $D_{\min} = 1/2(C+D-|C-D|)$ .

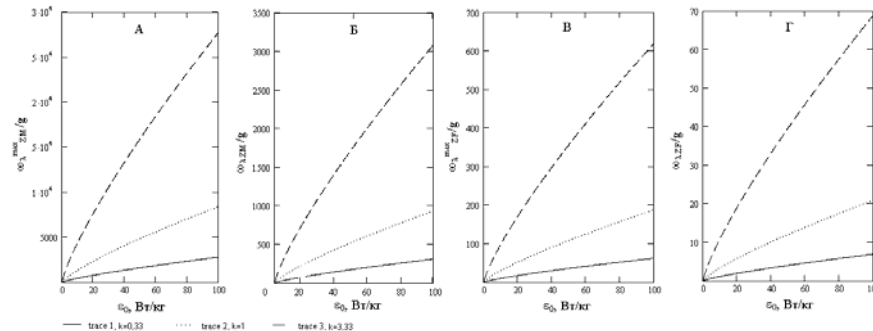


Рис. 6. Расчётная зависимость отношения средней ( $\omega_\lambda$ ) и максимальной ( $\omega_\lambda^{\max}$ ) величин ускорения турбулентных пульсаций масштаба  $\lambda \approx L_{C,D}$  к ускорению силы тяжести ( $g$ ) от средней величины диссипации энергии в аппарате в расчёте на единицу массы среды ( $\varepsilon_0$ )

Расчёт проведён для  $C=5$  мкм,  $D=d_{кр,ZM}=d_{кр}$  (зона мешалки) и  $D=d_{кр,ZF}$  (основная зона аппарата),  $\theta=50^\circ$ . Кривые (trace) соответствуют различным значениям коэффициента  $k_a$ : 1 –  $k_a=0,33$ ; 2 –  $k_a=1$ ; 3 –  $k_a=3,3$ .

А) Максимальная величина отношения  $\omega_\lambda/g$  в зоне мешалки ( $\omega_{\lambda,ZM}^{\max}/g$ ); Б) Средняя величина отношения  $\omega_\lambda/g$  в зоне мешалки ( $\omega_{\lambda,ZM}/g$ ); В) Максимальная величина отношения  $\omega_\lambda/g$  в основной зоне аппарата ( $\omega_{\lambda,ZF}^{\max}/g$ ); Г) Средняя величина отношения  $\omega_\lambda/g$  в основной зоне аппарата ( $\omega_{\lambda,ZF}/g$ ).

**4. Диаметр наибольших пузырьков газа ( $D_{кр}$ ), допускающих устойчивое адсорбционное взаимодействие с твёрдой частицей сферической формы в ядре турбулентного потока жидкости, должен в пределе удовлетворять условию устойчивости «двойной частицы» по отношению к деформации (65), при достижении силы обусловленной разницей динамических напоров жидкости и силы инерции максимальных величин**

$$F_D^{\max} \sim F_{пр} - (F_{\sigma,p} + F_a^{\max}), \quad (67)$$

которое с учётом (23, 32, 33, 43 и 52), а так же соответствующей подстановке

$D=D_{кр}$ , примет вид

$$2^{-3} \rho (v'_{\lambda 1(\max)})^2 D_{\min}^2 \sim [\sigma C D_{кр} (\sin \theta)^2 / 2 L_{C,D_{кр}}] [1 - C / 2 L_{C,D_{кр}}] - (1/6) D_{кр}^3 (\rho - \rho_r) (v'_{\lambda 2(\max)})^2 / L_{C,D_{кр}}, \quad (67)$$

откуда, с учётом (10), соответственно

$$2^{-3} \rho (3v'_{\lambda 1})^2 D_{\min}^2 \sim \{ \sigma C D_{кр} (\sin \theta)^2 / 2 L_{C,D_{кр}} [1 - C / 2 L_{C,D_{кр}}] - (1/6) D_{кр}^3 (\rho - \rho_r) [(3v'_{\lambda 2(\max)})^2 / L_{C,D_{кр}}] \}, \quad (68)$$

где  $L_{C,D_{кр}} = (1/2)(C^2 + D_{кр}^2 + 2CD_{кр}\cos\theta)^{1/2}$ ;  $L_{C+D_{кр}} = (1/2)[C+D+(C^2+D_{кр}^2+2CD_{кр}\cos\theta)^{1/2}]$ ;  $D_{\max}$  - диаметр наибольшей из взаимодействующих частиц (диаметрами  $C$  и  $D$ ).

Можно показать, что  $D_{\max} = 1/2(C+D+|C-D|)$ .

Выражая  $F_D^{\max}$  и  $F_a^{\max}$  через локальную величину диссипации энергии с учётом (28, 32, 33, 62), уравнение (67) примет вид

$$2^{-11/3}9\pi\rho(\varepsilon_0^L)^{2/3}(2L_{C+D_{кр}})^{2/3}D_{\min}^2 \sim \pi\sigma CD_{кр}(\sin\theta)^2(2L_{C,D_{кр}})^{-1} - \pi\sigma C^2D_{кр}(\sin\theta)^2(2L_{C,D_{кр}})^{-2} - (1/6)9\pi D_{кр}^3(\rho - \rho_r)(\varepsilon_0^L)^{2/3}(L_{C,D_{кр}})^{-1/3}, \quad (69)$$

откуда после элементарных преобразований получим

$$9\rho(\varepsilon_0^L)^{2/3}(2L_{C+D_{кр}})^{2/3}(D_{\min}/D_{\max}) + 2^{11/3}(1/6)9(D_{кр}^2/C)(\rho - \rho_r)(\varepsilon_0^L)^{2/3}/(L_{C,D_{кр}})^{-1/3} \sim \sim 2^{11/3}[\sigma(\sin\theta)^2/2L_{C,D_{кр}}][1 - C/2L_{C,D_{кр}}]. \quad (70)$$

В оценке (70) удобно перейти к приведённым (безразмерным) линейным размерам, выразив их через диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости при однородной и изотропной турбулентности ( $d_{кр}$ ). Деление уравнения (70) на уравнение (11) после элементарных преобразований даст

$$(\rho/\rho_r)^{1/3}[(2L_{C+D_{кр}}^*)^{2/3}(D_{\min}^*/D_{\max}^*) + 2^{11/3}(1/6)(D_{кр}^*)^2/C^*)(\rho - \rho_r)/\rho L_{C,D_{кр}}^{*1/3}] \sim \sim 2^{2/3}[(\sin\theta)^2/2L_{C,D_{кр}}^*][1 - C^*/2L_{C,D_{кр}}^*], \quad (71)$$

$$\text{где} \quad C^* = C/d_{кр};$$

$$D_{кр}^* = D_{кр}/d_{кр};$$

$$L_{C,D_{кр}}^* = (1/2)[(C^2 + D_{кр}^2 + 2CD_{кр}\cos\theta)^{1/2}]/d_{кр} = L_{C,D_{кр}}/d_{кр};$$

$L_{C+D_{кр}}^* = (1/2)[(C + D_{кр}) + (C^2 + D_{кр}^2 + 2CD_{кр}\cos\theta)^{1/2}]/d_{кр} = L_{C+D_{кр}}/d_{кр}$  - приведённые линейные размеры частиц;  $D_{\min} = 1/2(C + D_{кр} - |C - D_{кр}|)$ ;  $D_{\max} = 1/2(C + D_{кр} + |C - D_{кр}|)$ ;  $d_{кр}$  задан уравнением (11).

Поскольку силы инерции оценивается по порядку величины (59-62), принимая в расчёт среднее и предельные значения в рамках допустимого интервала вариации  $k_a$  (63), из (71) может быть получена оценка в форме приближённого уравнения, справедливого для условий однородной и изотропной турбулентности

$$(\rho/\rho_r)^{1/3}[(2L_{C+D_{кр}}^*)^{2/3}(D_{\min}^*/D_{\max}^*) + 2^{11/3}(1/6)k_a(D_{кр}^*)^2/C^*)(\rho - \rho_r)/\rho L_{C,D_{кр}}^{*1/3}] \approx \approx 2^{2/3}[(\sin\theta)^2/2L_{C,D_{кр}}^*][1 - C^*/2L_{C,D_{кр}}^*]. \quad (72)$$

где  $k_a = 0,33 \div 3,3$ , задан уравнениями (50, 63).

Уравнение (72) не имеет аналитического решения относительно  $D_{кр}^*$ , однако легко может быть решено в численном виде при известных величинах угла смачивания ( $\theta$ ), плотностей фаз ( $\rho$ ,  $\rho_r$ ), приведённого диаметра твёрдой частицы сферической формы ( $C^* = C/d_{кр}$ ) и коэффициента  $k_a$ .

На рис. 7. приведены рассчитанные из уравнения (72) зависимости диаметра наибольших пузырьков воздуха ( $D_{кр}^*$ ), допускающих устойчивое адсорбционное взаимодействие с твёрдой частицей сферической формы, от диаметра частицы ( $C^*$ ) при различных углах смачивания ( $\theta = 10; 20; 30; 40; 50$ , град). В расчёт принято:  $\rho_{\text{вода}} \approx 10^3$ ,  $\rho_{\text{воздух}} \approx 1,2$ ,  $\text{кг/м}^3$  ( $t = 30^\circ\text{C}$ ),  $\rho_{\text{вода}} \approx \rho_r$ .

Для удобства восприятия расчётных данных графики построены в полулогарифмических координатах: зависимости  $D_{кр}^*$  от  $\log(C^*)$ , прерывистыми линиями приведены кривые, соответствующие значениям  $C^* = D^*$  и  $C^* = 0,1D^*$ .

На рис. 7.А. расчётные зависимости  $D_{кр}^*$  от  $C^*$  построены на основе принятия в расчёт средней оценки ускорения турбулентных пульсаций, что соответствует  $k_a = 1$ , (63).

На рис. 7.Б расчётные зависимости  $D_{кр}^*$  от  $C^*$  построены в пределах возможных оценок ускорения турбулентных пульсаций для угла смачивания  $\theta = 50$  град. Расчёт произведён по уравнению (72) для наименьшей, средней и наибольшей оценок величины ускорения турбулентных пульсаций, соответствующих значениям (63) коэффициента  $k_{a(\min)} \approx 0,33$ ,  $k_{a(\text{cp})} = 1$  и  $k_{a(\max)} \approx 3,3$ .

Диаметр наибольших исходных (недеформированных при адсорбции) пузырьков газа ( $D_{0,кр}^*$ ), допускающих устойчивое адсорбционное взаимодействие с твёрдой частицей сферической формы можно оценить из уравнения (72) приняв справедливое, для не слишком больших углов смачивания ( $\theta$ ), приближение (36),

откуда  $D_{0.кр}^* \approx D_{кр}^*$ .

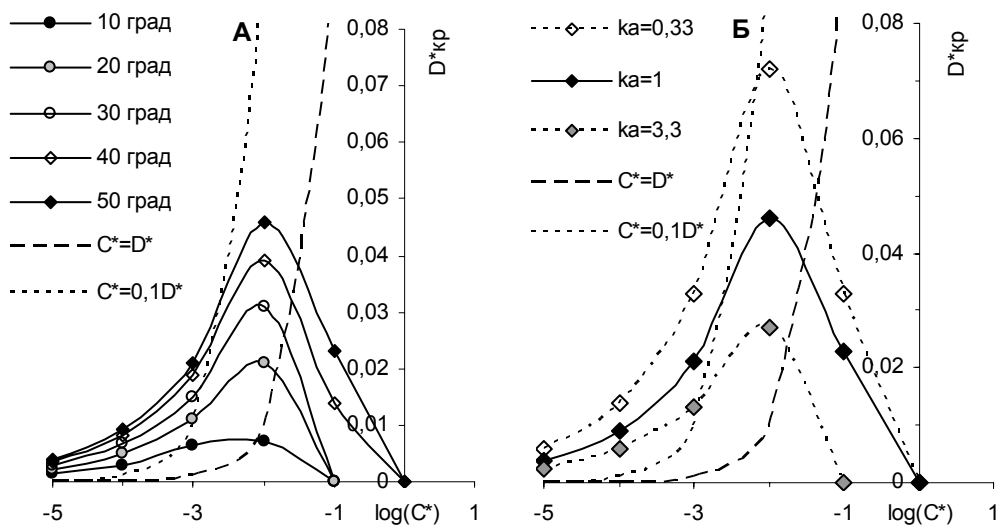


Рис. 7. Расчётные зависимости приведённого диаметра наибольших пузырьков газа, допускающих устойчивое адсорбционное взаимодействие с твёрдой частицей сферической формы ( $D_{кр}^*$ ) от приведённого диаметра твёрдой частицы ( $C^*$ ) при различных углах смачивания. Система вода-воздух

А) Рассчитано для  $k_a=1$  и углов смачивания  $\theta=10; 20; 30; 40$  и  $50$ , град.

Б) В рассчитано угла смачивания  $\theta=50$  град и  $k_a=0,33$ ,  $k_a=1$  и  $k_a=3,3$ .

## Обсуждение результатов

Условие дробления и устойчивости адсорбционного взаимодействия частиц твёрдой и газообразной дисперсных фаз в ядре турбулентного потока жидкости можно свести к модели устойчивости парного взаимодействия частиц дисперсных фаз: устойчивости «двойных частиц» типа твёрдая частица - пузырёк газа. Условие дробления и устойчивости определяется размерами частиц (диаметры  $C$ ,  $D$ ), плотностью фаз ( $\rho_{ж}$ ,  $\rho_{т}$ ,  $\rho_{г}$ , предполагается  $\rho_{ж} \approx \rho_{т}$ ), краевым углом смачивания ( $\theta$ ) и диаметром наибольших пузырьков газа, устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости ( $d_{кр}$ ). Известна зависимость  $d_{кр}$  от поверхностного натяжения жидкости ( $\sigma$ ), диссипации энергии в расчёте на единицу массы среды ( $\epsilon_0$ ), плотностей жидкой и газообразной фаз ( $\rho$ ,  $\rho_{г}$ ). Краевой угол смачивания ( $\theta$ ) может быть выражен (в соответствии с законом Юнга), через величины межфазного натяжения  $\sigma_{т-г}$ ,  $\sigma_{т-ж}$  и  $\sigma_{ж-г}$ :  $\cos(\theta) = (\sigma_{т-г} - \sigma_{т-ж}) / \sigma_{ж-г}$ , откуда получим  $\sin(\theta) = [1 - (\sigma_{т-г} - \sigma_{т-ж})^2 / \sigma_{ж-г}^2]^{1/2}$ . Это позволит в уравнении устойчивости (72) выразить величины  $d_{кр}$  и  $\theta$  через эти параметры ( $\sigma_{т-г}$ ,  $\sigma_{т-ж}$ ,  $\sigma_{ж-г}$ ).

Приведённое уравнение (условие) устойчивости (72), получено для условий однородной и изотропной турбулентности, однако оно может быть применено для оценки устойчивости в зонах реального аппарата, где выполняются (с известным приближением) условия однородной и изотропной турбулентности. Для таких оценок, в уравнении устойчивости (72) необходимо заменить  $d_{кр}$  соответствующей «локальной» величиной для этой зоны  $d_{кр,L}$ , т.е. - величиной  $d_{кр,Z}$ . Так для зоны мешалки необходимо принять в расчёт величину  $d_{кр,ZM}$ , а для основной зоны аппарата -  $d_{кр,ZF}$ . Условие устойчивости взаимодействия частиц во всём объёме аппарата можно оценить, приняв в расчёт диаметр наибольших пузырьков

устойчивых в аппарате ( $d_{кр}$ ), что соответствует (16) диаметру наибольших пузырьков, устойчивых в зоне мешалки  $d_{кр} \equiv d_{кр,ЗМ}$ .

Важно отметить, что устойчивость «двойных частиц», в частности, зависит от размера пузырьков газа (72). Поскольку в аппарате с механическим перемешиванием газовая дисперсная фаза является полидисперсной, то устойчивость адсорбционного взаимодействия твёрдых частиц с пузырьками различного размера будет существенно различаться.

При построении условия устойчивости (72) принята в расчёт максимальная величина пульсационной скорости ( $v'_{(max)\lambda}$ ), что предполагает некоторую неточность. Величину  $v'_{(max)\lambda}$  необходимо заменить некой «критической» величиной  $v'_{кр,\lambda}$ , вычисленной из условия достаточной продолжительности деформации для реализации акта дробления. Аналогичная вынужденная неточность (приближение) имеет место и в принятой оценке диаметров наибольших пузырьков газа и капель, устойчивых в турбулентном потоке жидкости [5, 6].

Предложенная модель устойчивости не распространяется на случаи:

- дробления вблизи твёрдых поверхностей аппарата;
- когда толщина вязкого подслоя вблизи поверхности твёрдой частицы больше пузырьков газа,

и должна быть модифицирована. Это предполагает уточнение оценки разницы динамических напоров воздействующих на «двойные частицы» в соответствующих условиях. Эти вопросы предполагают специальное рассмотрение.

В аппаратах с аэрацией и интенсивным механическим перемешиванием газовая дисперсная фаза является полидисперсной. При этом приведённый диаметр значительной фракции пузырьков порядка  $D^* \sim 1$  ( $D \sim d_{кр}$ ). Из этого обстоятельства и представленных расчётных данных (рис. 7) следует, что адсорбционное взаимодействие твёрдых частиц с большей частью пузырьков будут неустойчивым. Адсорбционное взаимодействие и дробление частиц твёрдой дисперсной фазы с пузырьками газа, превышающими  $D_{кр}$ , будет иметь случайный характер, обусловленный следующими обстоятельствами:

- Во-первых, вероятностью пребывания «двойной частицы» в зоне мешалки (зона аппарата с наибольшей локальной величиной диссипации энергии).
- Во-вторых, вероятностью достижения пульсационной скорости (в окрестности «двойной частицы») максимального значения  $v'_{(max)\lambda}$ .

Таким образом, очевидна необходимость оценки вероятности дробления и устойчивости «двойных частиц» как в одном испытании, так и за время пребывания взаимодействующих частиц в различных зонах аппарата. Такая теоретическая оценка необходима и для экспериментальной проверки точности приведённой теоретической оценки. Эти вопросы предполагают специальное рассмотрение.

Интересующее нас прикладное применение настоящей оценки состоит в следующем. В промышленных условиях культивирование микроорганизмов проводят в водных средах в аппаратах механическим перемешиванием и принудительной аэрацией. Даже при интенсивном механическом перемешивании среды средний диаметр пузырьков воздуха составляет  $D \approx 1 \div 3$  мм [13], размер клеток дрожжей  $C \approx 2-8$  мкм, размер бактериальных клеток (кокки)  $C \approx 0,2-0,5$  мкм. Для этих систем справедливы оценки, использованные в представленных зависимостях (рис. 7), что позволяет оценить устойчивости адсорбционного взаимодействия клеток микроорганизмов с пузырьками воздуха в реальных аппаратах.

Диаметр наибольших пузырьков газа, устойчивых в зоне аппарата  $d_{кр,З}$ , зависит от локальной величины диссипации энергии в зоне (1), как  $d_{кр,З} \sim (\varepsilon_0^Z)^{-0,4}$ ,

откуда следует  $d_{кр.Z}/d_{кр}=d_{кр.Z}^* \approx (\varepsilon_0^Z/\varepsilon_0^{ZM})^{-0,4}$ . Сопоставляя оценки (12, 14) локальных величин диссипации энергии в зоне мешалки ( $\varepsilon_0^{ZM} \approx 75\varepsilon_0$ ) и в основной зоне аппарата ( $\varepsilon_0^{ZF} \approx 0,25\varepsilon_0$ ), получим:  $\varepsilon_0^{ZM}/\varepsilon_0^{ZF} \approx 300$ . Из этого следует важная оценка - диаметр наибольших пузырьков газа устойчивых в основной зоне аппарата ( $d_{кр.ZF}$ ) примерно в 10 раз превосходит эту величину для зоны мешалки и аппарата в целом:  $d_{кр.ZF} \approx 10d_{кр} \equiv 10d_{кр.ZM}$ , или  $d_{кр.ZF}^* = d_{кр.ZF}/d_{кр} \approx 10$ . Однако, по экспериментальной оценке (сопоставление эмпирических уравнений) установлено, что средний диаметр пузырьков газа в основной части (зоне) аппарата в 2÷4 раза превосходит диаметр пузырьков в зоне мешалки [6]. Такое различие расчётных и экспериментальных величин (в 2,5÷5 раз), вероятно, свидетельствует о том, что формирование наибольших пузырьков газа в основной зоне аппарата детерминировано в основном их ограниченной коалесценцией, а так же уменьшением времени пребывания пузырьков в среде по мере увеличения их размера и, в меньшей степени, - их дроблением.

### Заключение

1. Дробление и устойчивость адсорбционное взаимодействие частиц твёрдой и газообразной дисперсных фаз в ядре турбулентного потока жидкости определяется размерами частиц (диаметры  $C, D$ ), плотностью фаз ( $\rho_ж, \rho_г, \rho_г$ , предполагается  $\rho_ж \approx \rho_г$ ), краевым углом смачивания ( $\theta$ ), при этом:

- в условиях однородной и изотропной турбулентности - диаметром наибольших пузырьков газа устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости ( $d_{кр}$ );
- при неоднородном распределении энергии - диаметром наибольших пузырьков газа, устойчивых в ядре турбулентного потока жидкости в зоне ( $d_{кр.Z}$ ).

2. В уравнении устойчивости величина ( $\theta$ ) может быть выражены через величины межфазного натяжения  $\sigma_{г-г}, \sigma_{г-ж}$  и  $\sigma_{ж-г}$ , а величина  $d_{кр}$  (или  $d_{кр.Z}$ ) - через поверхностное натяжение жидкости ( $\sigma$ ), диссипацию энергии ( $\varepsilon_0$ ), плотность фаз ( $\rho_ж, \rho_г$ ).

3. В процессах, протекающих в системе жидкость - жидкость - газ - твёрдая фаза с механическим перемешиванием, включающих этап адсорбции дисперсных фаз и происходящих через межфазные поверхности типа:

- твёрдая дисперсная фаза - газообразная дисперсная фаза,
  - твёрдая дисперсная фаза - жидкая сплошная фаза,
  - жидкая дисперсная фаза - газообразная дисперсная фаза,
- необходимо учитывать устойчивость адсорбционного взаимодействия газообразной и твёрдой дисперсных фаз, влияющих на образование межфазных поверхностей других фаз.

### Список литературы

1. Ганин П.Г. Теоретическая оценка устойчивости адсорбционного взаимодействия частиц твёрдой и жидкой дисперсных фаз в аппарате с перемешиванием // Сорбционные и хроматографические процессы. 2006. Т.6. Вып. 3. С. 486-497.
2. Колмогоров А.Н. Рассеяние энергии при локальной изотропной турбулентности // Докл. АН СССР. 1941. Т.32. Вып. 1. С. 19-21.
3. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Докл.



АН СССР. 1941. Т.32. Вып. 1. С. 22-24.

4. Колмогоров А. Н. О дроблении капель в турбулентном потоке // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 5. С. 825-828.

5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.

6. Брагинский Л.Н., Бегачёв В.И., Барабаш В.М. Перемешивание в жидких средах. Физические основы и методы расчёта. Л.: Химия, 1984. 336 с.

7. Бреншоу П. Введение в турбулентность и её измерение. М.: Мир, 1974. 277 с.

8. Химельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир, 1973. 957

с

9. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. М.: высшая школа, 1971. 328 с.

10. Mockel H.O. Die Verteilung der ortlichen Energiedissipation in einem Ruhrwerk // Chem. Techn. 1980. V. 32. № 3. P. 127-129.

11. Ганин П.Г. Адсорбционное взаимодействие частиц твёрдой и жидкой дисперсных фаз в аппарате с перемешиванием. Теоретическая оценка вероятности дробления и устойчивости взаимодействия частиц за время их пребывания в зонах аппарата // Сорбционные и хроматографические процессы. 2007. Т.7. Вып. 4. С. 618-630.

12. Кабанов Б.В., Фрумкин А.Н. Величина пузырьков газа, выделяющегося при электрофорезе // ЖФХ. 1933. Т.4. Вып. 5, С. 538-548.

13. Кафаров В.В., Винаров А.Ю., Гордеев Л.С. Моделирование биохимических реакторов. М.: Лесная промышленность, 1979. 344 с.

### **Theoretical Estimation of Solid and Gas Dispersed Phases Particles Adsorption Interactions Stability in the Apparatus with Mechanical Stirring and Aeration.**

Ganin P.G.

*St. Petersburg State Chemical-Pharmaceutical Academy, St. Petersburg, Russia*

A number of technological processes occurs in liquid - liquid - solid phase - gas system with mechanical stirring and aeration, e.g.. microorganism growth with use of liquid hydrophobic compounds (substrates). In these systems adsorption of disperse phases particles, formation of complex particles, including «double particles» and interphase surfaces of gas - solid, gas - liquid, liquid - solid type, is possible. Transport of a liquid hydrophobic disperse phase into a solid phase (sorbent) substantially occurs through an interphase surface of these phases. It is obvious, that formation of interphase surfaces of gas with solid and liquid disperse phases will reduce the surface area of solid and liquid disperse phases interphase contact, and hence a rate of substances transfer between these phases. The stability estimation model for adsorption interactions of solid spherical particles and gas bubbles in a nucleus of a turbulent flow of liquid was proposed. Analytical expression for an estimation of the size of the largest particles of the disperse phases admitting their stable adsorptive interaction was found.

*Ключевые слова: адсорбция частиц, устойчивость взаимодействия, дисперсные фазы, газ - твёрдая фаза, турбулентный поток жидкости, аппарат с перемешиванием, клетки микроорганизмов, пузырьки газа.*